DEVOIR SURVEILLÉ $N°2$ $S°2$

Exercice 1 : (6 points)

1. Calculer les limites suivantes en justifiant les étapes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{\sin^2(x)}$ **(1 pt)**
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$ **(1 pt)**
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$ **(1 pt)**
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{xE(x)}{x+E(x)}$ **(1 pt)**

2. Calculer, suivant les valeurs du paramètre réel m, la limite suivante : **(2 pts)**

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-3x+5}-mx$$

Exercice 2 : (6 points)

1. Montrer par récurrence que : **(3 pts)**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} : \quad \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$$

2. Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a l'inégalité : **(3 pts)**

$$\sqrt{x^2+1} \leq \frac{x^2}{2}+1$$

Exercice 3 : (8 points)

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x-3}$

1. Montrer que $D_f =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$. **(0,5 pt)**
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. **(1 pt)**
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. **(1 pt)**
3. (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis donner une interprétation géométrique du résultat. **(1 pt)**
   (b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en -3 puis donner une interprétation géométrique du résultat. **(1 pt)**
4. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}+(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ pour tout x dans $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$. **(1,5 pts)**
   (b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-3]$. **(1 pt)**
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f. **(1 pt)**

Bonne chance