SÉRIE D'EXERCICES : CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

Prof : Mr. EN NAOURI Mohammed **Niveau :** $1^{\text{ère}}$ Bac Sc. Math **Semestre 1**

Exercice 1 : Équations et Inéquations Fondamentales

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans l'intervalle I indiqué :

- $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \quad (I =]-\pi;\pi])$
- $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \quad (I =]-\pi;\pi])$
- $\tan x = \sqrt{3} \quad (I = [0;2\pi])$
- $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2} \quad (I = [-\pi;\pi])$
- $2\cos x - \sqrt{3} \geq 0 \quad (I =]-\pi;\pi])$
- $(\sqrt{2}\sin x + 1)(2\cos x - \sqrt{3}) \geq 0 \quad (I =]-\pi;\pi])$

Exercice 2 : Transformation Somme en Produit

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$.

1. Montrer que : $A(x) = \sin(2x)(1 + 2\cos x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$.

Exercice 3 : Comparaison

1. Montrer que : $\cos(4x) - \cos(2x) = (2\cos(2x) + 1)(\cos(2x) - 1)$.
2. Étudier le signe de $\cos(4x) - \cos(2x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
3. En déduire les solutions de l'inéquation $\cos(4x) > \cos(2x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Exercice 4 : Linéarisation et Étude

Soit $A(x) = \sqrt{3}(4\cos^4 x + \sin^2(2x)) - 2\sin(2x)$.

1. Montrer que : $4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^2(2x)$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 4\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.
4. Montrer que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad A(x) = 4\cos^2 x(\sqrt{3} - \tan x)$.
5. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $4\cos^4 x + \sin^2(2x) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2x)$.

Exercice 5 : Paramètres et Étude

On pose : $A(x) = \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) - 1$.

1. Écrire $A(x)$ sous la forme $r\cos(2x - \theta) - 1$ où r et θ sont à déterminer.
2. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : A(x) = 1 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. *(Selon énoncé fourni)*
   b) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. On pose $B(x) = A(x) + 1 - 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
   a) Vérifier que $B(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\left(1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
   b) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $B(x) = 0$.
   c) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation $B(x) \leq 0$.