Calcul Trigonométrique

Mathématiques : 1Bac Sciences mathématiques

D'après le cours de Pr EN NAOURI Mohammed

Lycée Hassan II

Capacités attendues

Objectifs du chapitre

- Maîtriser les différentes formules de transformation ;
- Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ;
- Représenter et lire les solutions d'une équation et d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.

Sommaire I

I. Rappel : Cercle trigonométrique

Activité

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique et $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ un repère orthonormé direct.

1. Définir un cercle trigonométrique.
2. Soit M un point d'abscisse curviligne $\frac{17\pi}{3}$.
   - Déterminer la valeur de α et k $(-\pi < \alpha \leq \pi,\ k \in \mathbb{Z})$ pour que $\frac{17\pi}{3} = \alpha + 2k\pi$.
   - Déduire l'abscisse curviligne principale du point M.
3. Déterminer les abscisses curvilignes principales puis les placer sur $(\mathcal{C})$:

$$A\left(\frac{7\pi}{2}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{67\pi}{4}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{267\pi}{6}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$$

4. Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\cos(\pi - x)$$

1. Formules d'addition (Cosinus et Sinus)

Propriété 1

Soient a et b des nombres réels, on a :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Application

1. Calculer $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$ sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.
2. Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
3. Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$:
   - $A(x) = \cos(\frac{\pi}{3} + x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)$
   - $B(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

2. Formules pour la Tangente

Propriété 2

Soient a et b des réels tels que les tangentes soient définies. On a :

- $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Application

1. Soit x tel que l'expression soit définie. Simplifier :

$$A = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

2. Calculer $\tan(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{7\pi}{12})$.

3. Formules de duplication et linéarisation

Propriété (Angle double)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ (si défini)

Linéarisation (Carrés)

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad ; \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Exercices

1. On remarque que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$. Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $1 + \cos(x) + 2\sin^2(\frac{x}{2}) = 2$.
3. Soit $x \neq k\pi$. Montrer que :

$$\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Propriété

Soient a et b deux nombres réels :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

Application

1. Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\cos(\frac{\pi}{12})\sin(\frac{5\pi}{12})$.
2. Montrer que $\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$.
3. Écrire sous forme d'une somme les expressions :

$$A(x) = \sin(x)\sin(3x)\sin(5x) \quad \text{et} \quad B(x) = \cos(x)\cos(3x)\cos(5x)$$

2. Transformation d'une somme en un produit

Propriété

Soient p et q deux réels.

- $\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
- $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

Application

1. Transformer en produit : $A(x) = \sin(x) + \sin(7x)$ et $B(x) = \sin(3x) + \sin(5x)$.
2. Déduire que $A(x) + B(x) = 4\cos(x)\cos(2x)\sin(4x)$.
3. Montrer que $\sin(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

IV. Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$

Propriété

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. Il existe un réel α tel que :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \alpha)$$

Avec :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple

Transformer $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$: On a $r = \sqrt{3 + 1} = 2$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Remarque : On peut aussi écrire sous la forme $r\sin(x + \beta)$

Applications

Exercice

Écrire sous forme de $r\cos(x-\alpha)$ les expressions suivantes :

1. $A(x) = \cos(x) + \sin(x)$
2. $B(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$
3. $C(x) = \sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x)$
4. $D(x) = \sqrt{3}\cos(2x - \frac{\pi}{3}) - \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

V. Équations et Inéquations

Rappel (Résolution d'équations)

- $\cos x = \cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$
- $\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$
- $\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi$

(avec $k \in \mathbb{Z}$)

Application : Résoudre les équations et inéquations

- $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ sur $I =]-\pi;\pi]$
- $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ sur $I =]-\pi;\pi]$
- $\tan x = \sqrt{3}$ sur $I = [0;2\pi]$
- $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ sur $I = [-\pi;\pi]$
- $2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ sur $I =]-\pi;\pi]$
- $(\sqrt{2}\sin x + 1)(2\cos x - \sqrt{3}) \geq 0$ sur $I =]-\pi;\pi]$