Lycée Hassan II — **Prof : EN NAOURI Mohammed**

Année scolaire : 2025/2026 — $1^{\text{ère}}$ Année Sciences Mathématiques

Série : Limites d'une fonction numérique

Exercice 1 – *Déterminer les limites des fonctions suivantes en a :*

1) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$; $a=2$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-x^2+2x+3}$; $a=3^+$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{6}}{x-2}$; $a=2$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{4x^2-x-1}$; $a=-\infty$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x^2+3}{2x^2+7}}$; $a=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{3x^3+7x^2-1}{5x^4-x^2+7}$; $a=+\infty$

7) $f(x)=\dfrac{x^7-1}{x^5-1}$; $a=1$

8) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$; $a=3^-$

9) $f(x)=\sqrt{25x^2+2x+1}-5x+2$; $a=-\infty$

10) $f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}-5x+11$; $a=+\infty$

11) $f(x)=\sqrt{16x^2+x-1}-\sqrt{25x^2+3x+2}$; $a=-\infty$

12) $f(x)=2x-3-\sqrt{4x^2+3x-2}$; $a=+\infty$

Exercice 2 – *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :*

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2-2x+8}{-7x^2+13x+2}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2-x\sqrt{x}+1$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1}$

11) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^3-1)^2(1-x)^3}{5x^4-x^2+7}$

12) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{1+x}}-|x|$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

14) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-7x-6}{|x-3|}$

15) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|+|x-1|-|x+1|}{x^2}$

17) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$

18) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^6+1}-x^3$

Exercice 3 – *Calculer les limites suivantes :*

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(6x)}{\sin(3x)}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x}}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+4\sin x}-2}{x}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{\sin 3x\tan 2x}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x$

10) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ **12)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{\tan 5x}$ **13)** $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\cos x \sin x}{1+\sqrt{2}\cos x}$

Exercice 4

1) *(a)* Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{2-\cos x}{x^2+1} \leq \dfrac{3}{x^2+1}$

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\cos x}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\cos x}{x^2+1}$

2) Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x^2}$.

Exercice 5 – *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$*

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Étude des limites en l'infini :

(a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad |f(x)| \leq \dfrac{1}{|x|}$

(b) En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 6 – *Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right)$*

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2) Montrer que :

(a) $\forall x \in]-\infty, 0[$: $\dfrac{2}{1+x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{2-2x}{1+x^2}$

(b) $\forall x \in]0, +\infty[$: $\dfrac{2-2x}{1+x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{2}{1+x^2}$

3) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$.

4) *(a)* Déterminer les expressions de f sur $\left]\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

(b) f admet-elle une limite au point $\dfrac{1}{2}$?

Exercice 7

Discuter, suivant les valeurs de paramètre réel m, l'existence et la valeur de la limite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{3m^2x^2 + (m+1)x + m - 2}{x-1}$$

Si nécessaire, on distinguera les limites à gauche et à droite.

Exercice 8 – *Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(a+2)x^2 + (b+1)x + 2}{x^2-1}$ avec a et b deux paramètres réels.*

1) Déterminer suivant les valeurs de a et b la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Déterminer a et b pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3) Déterminer suivant les valeurs de a et b la limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Exercice 9 – *Soit f_m la fonction définie par :* $f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{mx^2+x-2m}{x-1} & \text{si } x>1 \\ \sqrt{x^2+3+mx} & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$ *où m est un paramètre réel.*

1) Déterminer D_m le domaine de définition de f_m.

2) Déterminer les valeurs de m pour que f_m admette une limite finie en 1.

3) Discuter suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_m(x)$.

Exercice 10 – *f_m est la fonction définie par $f_m(x) = \sqrt{x^2+mx+m^2}$ où m est un paramètre réel.*

1) Donner le domaine de définition de la fonction f_m.

2) Calculer la limite de f_m en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) *(a)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_m(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_m(x)-x)$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f_m(x) - \left(x+\dfrac{m}{2}\right)\right)$.

4) *(a)* Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_m(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f_m(x)+x)$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f_m(x)+x+\dfrac{m}{2}\right)$.

5) Donner l'expression de $f_m(x)$ pour $m=0$ et vérifier la validité des résultats obtenus dans les questions précédentes.