

La rotation dans le plan

Mathématiques - 1er BAC Sciences Mathématiques

Professeur : EN NAOURI Mohammed

Année Scolaire 2025-2026

1. I- Rotation - Rotation réciproque d'une rotation

- 1-1/ Rotation
- 2/ Rotation réciproque

2. II- Propriétés des rotations

- 1/ Conservation de la distance
- 2/ Conservation du coefficient de colinéarité
- 3/ Conservation du barycentre
- 4/ Conservation des mesures des angles orientés

3. III- Images de certaines figures par une rotation

- 1/ Image d'un cercle par une rotation
- 2/ Image d'une droite, d'une demi-droite et d'un segment

4. IV- Décomposition d'une rotation - Composition de deux rotations

- 1/ Décomposition d'une rotation

I- Rotation - Rotation réciproque d'une rotation

Activité

Soit (U) le cercle trigonométrique lié à un repère orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) (unité : $1u = 2 \text{ cm}$).

- 1 Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B(\frac{\pi}{3})$; $C(\frac{2\pi}{3})$; $D(\pi)$; $E(\frac{4\pi}{3})$ et $F(\frac{5\pi}{3})$
- 2 Déterminer les mesures principales, en radian, des angles orientés suivants : (\vec{OA}, \vec{OB}) ; (\vec{OB}, \vec{OC}) ; (\vec{OC}, \vec{OD}) ; (\vec{OD}, \vec{OE}) ; (\vec{OE}, \vec{OF}) et (\vec{OF}, \vec{OA}) .
- 3 Dédurre que :

$$\begin{cases} OA = OB \\ (\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} OB = OC \\ (\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Définition et Notation :

- On dit que B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - On écrit : $r(A) = B$; $r(B) = C$ et $r(C) = D$.
 - La transformation du plan qui vérifie :
 - l'image du point O est O ;
 - l'image d'un point M du plan différent de O est le point M' défini par : $OM' = OM$ et $(\vec{OM}, \vec{OM}') \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$est appelée **rotation** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - On la note $r(O, \frac{\pi}{3})$ ou r .
- 4 Déterminer les images des points D , E et F par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

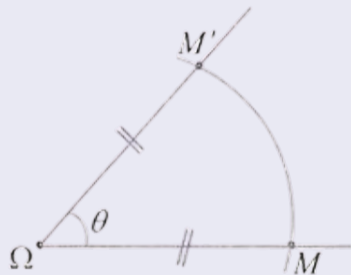
1/ Rotation - Définition

Définition

Dans le plan orienté positivement, on considère un point Ω et un réel θ .

La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

- Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$.
- Si $M \neq \Omega$, alors :
$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} .$$



Notation

On note cette transformation par $r(\Omega, \theta)$, ou simplement r .

- Le centre de la rotation est l'unique point invariant par cette rotation (pour $\theta \not\equiv 0[2\pi]$).
- Le point M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon $R = \Omega M$.
- La médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point Ω .
- Le triangle $\Omega MM'$ est isocèle de sommet Ω .

2/ Rotation réciproque d'une rotation

Proposition

Toute rotation $r(\Omega; \theta)$ du plan est une application bijective. Sa bijection réciproque est la rotation $r^{-1}(\Omega; -\theta)$.

Propriété

Pour tous points M et N du plan :

$$r(M) = N \iff r^{-1}(N) = M$$

Où r^{-1} est la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$.

Exemple :

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O , et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer $r(A)$, $r(C)$, $r^{-1}(B)$ et $r^{-1}(A)$.

Exemple :

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O , et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer $r(A)$, $r(C)$, $r^{-1}(B)$ et $r^{-1}(A)$.

Solution :

- On a : $OA = OB$ (O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC).
- Et : $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
- *Justification* : $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv 2(\vec{AB}, \vec{AC})[2\pi]$ (Relation entre mesure de l'angle au centre et mesure de l'angle inscrit).

Par suite, B est l'image de A par la rotation r . **Donc** $r(A) = B$.

De même, on trouve que $r(C) = A$.

Pour la rotation inverse r^{-1} :

- On a $r^{-1} = r(O, -\frac{2\pi}{3})$ et $OA = OB$.
- Et $(\vec{OB}, \vec{OA}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Donc : $r^{-1}(B) = A$.

Application

Soit $ABCD$ un carré avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

- 1 1 Quel est l'angle de la rotation r_1 , de centre A qui transforme B en D ?
- 2 2 Quel est l'angle de la rotation r_2 , de centre C qui transforme B en D ?
- 2 2 Considérons la rotation $r(B, \frac{\pi}{4})$.
 - Préciser la rotation inverse de r (centre, angle).
 - Posons $C' = r^{-1}(C)$. Tracer le point C' .

II- Propriétés des rotations

Proposition

Soient A et B deux points du plan.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors :

$$AB = A'B'$$

On dit que la rotation conserve la distance.

2/ Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Proposition

Soient A, B et C trois points alignés tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(C) = C'$, alors :

$$\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$$

Conclusion

On dit que la rotation conserve l'**alignement** des points et le **coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.

Exemple :

Soit $r = r(\Omega, \alpha)$ une rotation de centre Ω et d'angle α .

Si $ABCD$ est un losange de centre O et A', B', C' et D' sont les images respectives de A, B, C et D par la rotation r , **alors $A'B'C'D'$ est un losange.**

Exemple :

Soit $r = r(\Omega, \alpha)$ une rotation de centre Ω et d'angle α .

Si $ABCD$ est un losange de centre O et A', B', C' et D' sont les images respectives de A, B, C et D par la rotation r , **alors $A'B'C'D'$ est un losange.**

En effet :

- 1 Posons $O' = r(O)$.
 - O' est le milieu de $[A'C']$ et $[B'D']$ car **la rotation conserve le milieu** et O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$.
 - **Donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme (1).**
- 2 D'autre part, on a $AB = BC$.
 - Comme une **rotation conserve les distances**, on en déduit que $A'B' = B'C'$ (2).

Conclusion : De (1) et (2), $A'B'C'D'$ est un losange.

Proposition

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(G) = G'$, alors G' est le barycentre du système $\{(A'; \alpha); (B'; \beta)\}$.

- On dit que la rotation **conserve le barycentre**.
- Cette propriété s'étend au barycentre de trois ou quatre points pondérés.
- La rotation conserve le **milieu** d'un segment et le **centre de gravité** d'un triangle.

Proposition

Soient A et B deux points distincts du plan.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta[2\pi]$$

(où θ désigne l'angle de la rotation).

Remarque

La propriété précédente permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

Proposition

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Soient A', B', C' et D' leurs images respectives par la rotation. Alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'})[2\pi]$$

On dit que la rotation conserve les mesures des angles orientés.

III- Images de certaines figures par une rotation

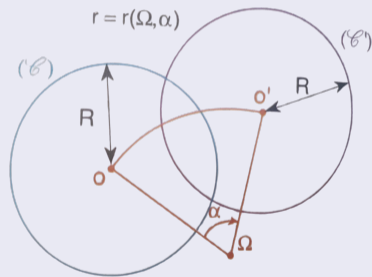
1/ Image d'un cercle par une rotation

Théorème

L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de **même rayon**.

Plus précisément :

Si $\mathcal{C}(O, R)$ est un cercle de centre O et de rayon R , et si $O' = r(O)$, alors l'image de \mathcal{C} est le cercle $\mathcal{C}'(O', R)$.



2/ Image d'une droite, d'une demi-droite et d'un segment

Proposition

Soient A et B deux points distincts du plan. Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors :

- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$: $r((AB)) = (A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$: $r([AB]) = [A'B']$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$: $r([AB)) = [A'B')$.

- **Parallélisme** : Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- **Orthogonalité** : Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- **Triangles** : L'image d'un triangle (isocèle, rectangle ou équilatéral) est un triangle de même nature.
- **Quadrilatères** : L'image d'un rectangle est un rectangle.
- **Intersections** : La rotation conserve l'intersection :

$$r(F_1 \cap F_2) = r(F_1) \cap r(F_2)$$

Application

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I un point du segment $[BD]$ et \mathcal{C} le cercle de centre I et de rayon IA .

Le cercle \mathcal{C} coupe la droite (AB) en J et la droite (AD) en K .

- 1 Construire une figure convenable.
- 2 Montrer que $BJ = DK$.

IV- Décomposition d'une rotation - Composition de deux rotations

1/ Décomposition d'une rotation

Activité

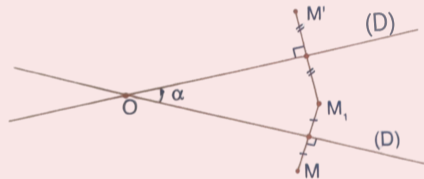
On considère dans le plan orienté deux droites sécantes en un point O : $(D) = D(O, \vec{u})$ et $(D') = D(O, \vec{u}')$. On pose $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \alpha[2\pi]$.

Soit M un point du plan et notons :

$$M_1 = S_{(D)}(M) \quad \text{et} \quad M' = S_{(D')}(M_1)$$

- 1 Déterminer une mesure de (\vec{OM}, \vec{OM}') en fonction de α .
- 2 Préciser la nature de l'application $S_{(D')} \circ S_{(D)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.

Conclusion : Soit r une rotation de centre Ω et d'angle β . r est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en Ω .



Théorème : Décomposition

Toute rotation $r = r(\Omega, \alpha)$ peut s'exprimer comme composée de deux symétries orthogonales $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ avec (D) et (D') passant par Ω , le centre de la rotation.

Plus précisément :

$$r = S_{(D')} \circ S_{(D)}$$

avec $(D) \cap (D') = \{\Omega\}$ et :

$$(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \frac{\alpha}{2} [2\pi]$$

où $(D) = D(\Omega, \vec{u})$ et $(D') = D(\Omega, \vec{u}')$.

Remarque (Cas des droites parallèles)

Si (D) et (Δ) sont deux droites **parallèles**, alors la composée $S_{(\Delta)} \circ S_{(D)}$ est une **translation**.

Son vecteur est $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ où $A \in (D)$ et $A' = S_{(\Delta)}(A)$.

Exemple :

ABC est un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Notons (Δ_A) et (Δ_B) et (Δ_C) les hauteurs du triangle ABC qui passent par A, B et C respectivement.

Montrons que : $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_A)} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_A)}$

Exemple :

ABC est un triangle équilatéral avec $\overrightarrow{(\overline{AB}, \overline{AC})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Notons (Δ_A) et (Δ_B) et (Δ_C) les hauteurs du triangle ABC qui passent par A, B et C respectivement.

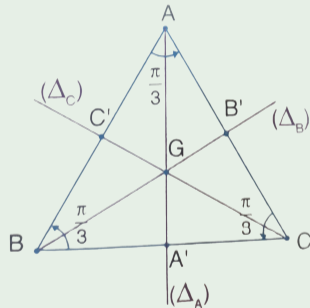
Montrons que : $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_A)} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_A)}$

On a : (Δ_A) est aussi une bissectrice intérieure de l'angle \widehat{BAC} puisque ABC est équilatéral.

Donc $\overrightarrow{(\overline{AB}, \overline{AA'})} \equiv \overrightarrow{(\overline{AA'}, \overline{AC})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

et $S_{(AC)} \circ S_{(AA')} = r\left(A, 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$

et $S_{(AA')} \circ S_{(AB)} = r\left(A, 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$.



Conclusion :

$$r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_A)} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_A)}$$

Activité

On considère deux rotations : $r_1 = r(\Omega_1, \alpha_1)$ et $r_2 = r(\Omega_2, \alpha_2)$ avec $\alpha_1 \not\equiv 0[2\pi]$ et $\alpha_2 \not\equiv 0[2\pi]$.

1^{er} cas : Supposons que $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$.

- Montrer que l'application $r_2 \circ r_1$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

2^{ème} cas : Supposons que $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et posons $(D) = (\Omega_1\Omega_2)$.

On note (D_1) la droite image de (D) par $r(\Omega_1, -\frac{\alpha_1}{2})$ et (D_2) l'image de (D) par $r(\Omega_2, \frac{\alpha_2}{2})$.

- 1 Montrer que : $r_1 = S_{(D)} \circ S_{(D_1)}$ et $r_2 = S_{(D_2)} \circ S_{(D)}$.
- 2 Déterminer la nature de $r_2 \circ r_1$ et préciser ses éléments caractéristiques (distinguer les deux cas : $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0[2\pi]$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \not\equiv 0[2\pi]$).

Théorème :

Soient $r_1 = r(\Omega_1, \alpha_1)$ et $r_2 = r(\Omega_2, \alpha_2)$ deux rotations.

- 1 Si $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
- 2 Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \not\equiv 0[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
- 3 Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Remarque

Dans le cas où $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 2k\pi$, pour déterminer le vecteur de la translation, il suffit de déterminer l'image d'un point connu O par $r_1 \circ r_2$. Si $(r_1 \circ r_2)(O) = O'$, alors le vecteur de la translation est $\overrightarrow{OO'}$.

Exemple :

Prenons les données et les notations de l'exemple précédent, et posons :

$$r_A = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right), \quad r_B = r\left(B, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad r_C = r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$$

Exemple :

Prenons les données et les notations de l'exemple précédent, et posons :

$$r_A = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right), \quad r_B = r\left(B, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad r_C = r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$$

On a alors :

- $r_A \circ r_B = r\left(G, \frac{2\pi}{3}\right)$
- $r_B \circ r_C = r\left(G, \frac{2\pi}{3}\right)$
- $r_C \circ r_A = r\left(G, \frac{2\pi}{3}\right)$