Cours : Limite d’une fonction numérique

Pr EN Naouri Mohammed

Mathématiques : 1Bac Sciences Mathématiques

22 mars 2026

Sommaire

I- Limite finie d'une fonction numérique en un point

Définition

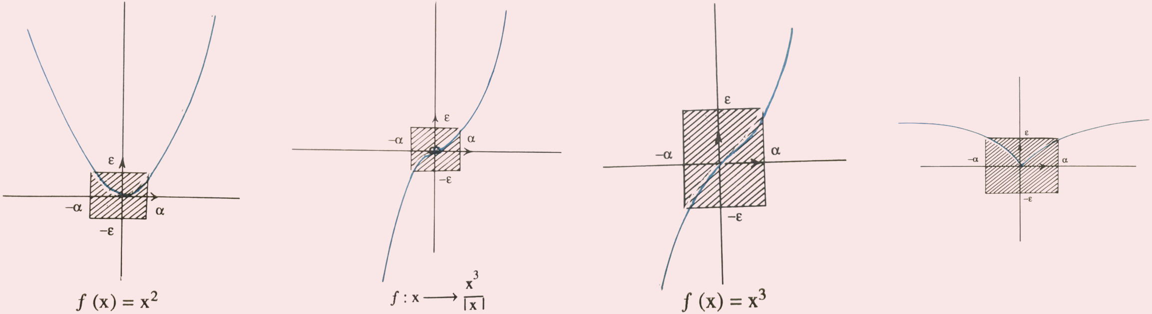
Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que f est définie au **voisinage de** a sauf peut-être en a s'il existe un réel r strictement positif tel que :
$$]a-r;a+r[-\{a\} \subset D_f$$
- On dit que f est définie au **voisinage de** a **à droite** s'il existe $r>0$ tel que :
$$]a;a+r[\subset D_f$$
- On dit que f est définie au **voisinage de** a **à gauche** s'il existe $r>0$ tel que :
$$]a-r;a[\subset D_f$$

2/ Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

Activité :

Considérons les fonctions suivantes représentées par leurs courbes : $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$



On remarque graphiquement que pour tout élément ϵ de $\mathbb{R}^{*+}$, il existe un élément α de $\mathbb{R}^{*+}$ tel que la courbe de chacune de ces fonctions se trouve dans la partie hachurée.
Autrement dit : pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$, on a : $|f(x)| < \epsilon$

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0. Dire que f a pour limite 0 quand x tend vers 0 signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ϵ, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\epsilon;\epsilon[$.

Autrement dit :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0);(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \Rightarrow 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f(x) = 0$.

Application

1. Montrer en utilisant la définition que :
   - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2+1} = 0$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} (\forall x \in I)|f(x)| \leq |u(x)| \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$$

Remarques

Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to 0} kx^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} k\sqrt{|x|} = 0$$

La limite d'une fonction en 0 est une notion locale : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de 0. On peut avoir $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ sans que la fonction soit définie en 0.

Application

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(\frac{\pi}{x^3})$
2. Justifier que $(\forall x \in]-1;1[)$: $|2x^3 - 3x| \leq 3|x|$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(2x^3 - 3x)$

4. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. Montrer que $|f(x)| \leq |x|$ et déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a et $l \in \mathbb{R}$. Dire que f a pour limite l quand x tend vers a signifie :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0); (\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim_a f(x) = l$.

Remarque

En posant $x - a = h$, on obtient : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a + h) = l$.

Application

1. Montrer en utilisant la définition que :
$$\lim_{x \to 2} \sqrt{4x+1} = 3$$

Proposition

Soit f et u définies sur $I =]a-r; a+r[- \{a\}$. Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I) |f(x) - l| \leq |u(x)| \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarques

- Pour tout $(a; k) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to a} k(x-a)^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} k\sqrt{|x-a|} = 0$.
- Si la limite existe, elle est **unique**.

Application

Soit $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Prouver $|f(x) - 1| \leq (x-1)^2$ et déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$
- Si $Q(a) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
- $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
- $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$ (si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)
- Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 7x - 1)$
2. $\lim\limits_{x \to -1} (x^{2018} - x^{2017} + 2)$
3. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} (x^3 - 5x^2 + x + 1)$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x - 1}$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \frac{x^2 + x}{2x - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 3}$
7. $\lim\limits_{x \to 3} (x - 2)^3 (1 - x^2)$
8. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(2x-1)(x^2-5x+3)}{(5x^2-6)(1-x+x^2)}$
9. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x$ et 10. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \tan x$

5/ Limite à droite - Limite à gauche

Définitions

Limite à droite : On dit que f admet une limite l en a à droite si :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0);(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

Noté : $l = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Limite à gauche : On dit que f admet une limite l en a à gauche si :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0);(\forall x \in D_f)(-\alpha < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

Noté : $l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Applications

Étudier la limite de f au point a :

1. $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x^2-2x}$ et $a = 2$.
2. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2}; x \geq 0 \\ f(x) = E(x); x < 0 \end{cases}$ en $a = 0$.

II- Limite infinie d'une fonction numérique en un point

Définitions

Limite $+\infty$: Dire que f a pour limite $+\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A > 0$ pour x proche de 0.

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0);(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Limite $-\infty$:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0);(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Remarques

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{k}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{k}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty$ si n est pair.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty$ si n est impair.

Proposition

Soit f et u définies sur $I =]-r; r[- \{0\}$.

- Si $\forall x \in I : f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I : f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Application

Calculer la limite suivante :
$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{x} - 1 + \cos\frac{2}{x}\right)$

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A > 0$, quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit :

$$(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ ;\ (\forall x \in D_f) \quad (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$

- Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A < 0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit :

$$(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ ;\ (\forall x \in D_f) \quad (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = -\infty$

Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$
- Si n pair : $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.
- Si n impair : $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$.

Applications

1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3}{(x+1)^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

III- Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

1/ Limite nulle d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
- On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty; A[$).
- On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x \in D_f$, $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$)

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)]$$

Remarques et Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = 0.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{\sqrt{-x}} = 0$$

2/ Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-l)=0$.

Autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow [(\forall\epsilon>0)(\exists B>0);(\forall x\in D_f)(x>B\Rightarrow |f(x)-l|<\epsilon)]$$

(Définition analogue en $-\infty$ avec $x<-B$).

Proposition

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.
Si pour tout $x\in I$: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$, alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.
Si pour tout $x\in I$: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} u(x)=0$, alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$

Applications

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1+\cos x}-1}{x^2}$. Montrer $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ et déduire limites.

IV- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.
On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists B > 0); (\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$$

Remarques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Si n pair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$. Si n impair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.
- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.
- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Applications

1. Soit $f(x) = 5x^2 + x\sqrt{x^2+1}$.
   - Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \geq 5x^2$ et déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Soit $g(x) = |x| + 1 - \sin(2x+1)$.
   - Vérifier $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq g(x)$.
   - En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

VI- Opérations sur les limites

Proposition

Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$, alors :

- $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$; $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$; $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$
- Si $l' \neq 0$ alors : $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ et $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$
- Pour $k \in \mathbb{R}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} (kf)(x) = kl$
- Si $l > 0$ alors : $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

Remarques

- Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.
- On peut démontrer ces propriétés en utilisant la définition de la limite finie en un point.

Applications

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2 + \frac{3x}{x+1} - 2\sqrt{x^2-1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

   1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 1\right)$
   2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{3x+\cos x}{2\sin x} + 2x\tan x\right)$

Proposition

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$ où $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et f est positive sur I, alors : $l \geq 0$
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ et $f \leq g$ sur I, alors : $l \leq l'$
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ et $g \leq f \leq h$ sur I, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarque

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers a à droite ou à gauche ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Limite d'un produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I

Limite d'un quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$ ou $l<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	0^+ ou 0^-	l'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$ (règle signes)	$\pm\infty$ (règle signes)	F.I	F.I

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Application

1. Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + x^2)$

❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$

❸ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}$

❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^2+x}{(x-2)^2}$

❺ $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x}{3-x}$

❻ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{(1-x)^2}$

❼ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{2025}}{x^{2026}+1}$

❽ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(3 - \sqrt{x})$

Application

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

VII- Quelques méthodes pour lever une indétermination

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynômes définies par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

où $a_n, \ldots, a_1, a_0, b_p, \ldots, b_1, b_0$ des réels tels que $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2 + x + 1)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^3 + 5x^2 + x + 1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3 - 4x)^3(5x + 1)^2$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+5}{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x}{2x^2+1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-7}{x^3+2x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4+x^2+1}{x-1}$

Proposition & Remarque

Proposition : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque : Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers $-\infty$ ou vers a à droite ou à gauche.

Applications (1/2)

1. Calculer les limites suivantes :

   1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{-x^2+x+6}{x^2-4x+3}$
   2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^5-32}$
   3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2-\sqrt{1-3x}}{x^2-1}$
   4. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$
   5. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}$

Applications (2/2)

2. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{|2x+3|-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-\sqrt{x+2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^3-27}$

6. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+3x+3}{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}+1}$

Applications

1. Calculer les limites suivantes :
   1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}\right)$
   2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3x^2+4}-x^2+2\right)$
   3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-6x-1}+2x-5\right)$
   4. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-3\right)$
   5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}+x-1\right)$
2. Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+mx\right)$
3. Soit a, b et c trois réels non nuls tels que $a>0$. Calculer suivant les valeurs de a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+x\right)$$

Proposition

Soit a un réel non nul. On a :

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1$

Applications

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(6x)}{\sin(4x)\tan(3x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{x^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(\pi x)}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$