

Dérivabilité d'une fonction numérique :

Professeur : EN NAOURI Mohammed

Mathématiques : 1Bac Sciences Mathématiques

2026

- 1 I- Dérivabilité d'une fonction en un point
 - 1/ Nombre dérivé en un point
 - 2/ Approximation affine d'une fonction dérivable
- 2 II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche
 - 1/ Définitions et notations
 - 2/ Interprétation géométrique
- 3 III- Dérivabilité sur un intervalle
 - 1/ Fonction dérivée
 - 2/ Opérations sur les fonctions dérivables
- 4 IV- Applications de la dérivation
 - 1/ Monotonie d'une fonction numérique
 - 2/ Extrema d'une fonction dérivable
- 5 V- Dérivées successives
- 6 VI- L'équation différentielle

I- Dérivabilité d'une fonction en un point

Déterminer la limite quand x tend vers a de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ dans les cas suivants :

① $f(x) = 3x^2 - x + 2$ et $a = -2$

② $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$ et $a = 2$

③ $f(x) = \sin 3x$ et $a = \frac{\pi}{6}$

④ $f(x) = |2x^2 + x - 3|$ et $a = 1$

1/ Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I . On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a . Il est noté $f'(a)$. On écrit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Remarques

Dans le taux de variation $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$:

- $x - a$ représente une variation de x .
- $f(x) - f(a)$ la variation correspondante de y .

Quand les accroissements de x et y deviennent petits, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$. C'est pour cette raison qu'on trouve notamment en physique, la notation $\frac{df}{dx}$.

Exemple

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = 2x^2 + 2x$.

Montrer que la fonction f est dérivable en $a = 1$ puis déduire le nombre dérivé en 1.

Exemple

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = 2x^2 + 2x$.

Montrer que la fonction f est dérivable en $a = 1$ puis déduire le nombre dérivé en 1.

Calculons la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 + x - 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 2) = 6\end{aligned}$$

- Donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé en 1 est 6.
- On écrit : $f'(1) = 6$.

Remarque

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, alors f n'est pas dérivable en a .

Application

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

❶ $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $a = \sqrt{2}$

❷ $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ et $a = \frac{2}{3}$

❸ $f(x) = \sin x$ et $a = 0$

❹ $f(x) = \cos x$ et $a = \frac{\pi}{2}$

2/ Approximation affine d'une fonction dérivable

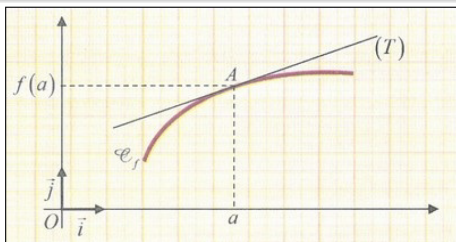
Définition

Soit f une fonction dérivable en a .

La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au point d'abscisse a .

La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a .

On écrit alors : $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$ au voisinage de a ou $f(h) \approx hf'(a) + f(a)$ au voisinage de 0.



Remarques

- On a déjà vu dans les activités les approximations suivantes, valables pour h voisin de 0 :
 - $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$
 - $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$
 - $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$
 - $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$
- L'approximation affine locale consiste donc à assimiler \mathcal{C}_f à (T) pour h proche de 0 (et donc pour x proche de a).

Application 1

Donner des valeurs approchées des nombres suivants :

$$(0,998)^3 ; (2,00578)^2 ; (1,04958)^3$$
$$\sqrt{1,00791} ; \frac{1}{1,0434} ; \frac{1}{(0,999)^2}$$

Application 2

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au point d'abscisse a , dans chacun des cas suivants :

- 1 $f(x) = 2x^2 + x - 1$ et $a = 1$
- 2 $f(x) = 3x^2 + 2$ et $a = -1$
- 3 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2$ et $a = 2$
- 4 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $a = 1$

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Énoncé

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$.

Énoncé

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$.

Conclusion et Définitions

On peut conclure donc que f n'est pas dérivable en 0.

- Posons : $g(x) = 3x^2 + x$ on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1$ et puisque $g = f$ sur $] -\infty, 0[$, on peut dire que f **est dérivable à gauche de 0** et le nombre 1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0 et se note $f'_g(0)$.
- Posons : $h(x) = -2x^2 + 3x$ on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 3$ et puisque $h = f$ sur $]0, +\infty[$, on peut dire que f **est dérivable à droite de 0** et le nombre 3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0 et se note $f'_d(0)$.

1/ Définitions et notations

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$.
On dit que f est **dérivable à droite de** a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle cette limite le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f'_d(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ où $r > 0$.
On dit que f est **dérivable à gauche de** a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle cette limite le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f'_g(a)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a .
 f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de a
et : $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = |x|$; $a = 0$

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = |x|$; $a = 0$

• À droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad (x \geq 0 \Rightarrow |x| = x)$$

Donc f est dérivable à droite de 0 et on a $f'_d(0) = 1$.

• À gauche de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad (x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x)$$

Donc f est dérivable à gauche de 0 et on a $f'_g(0) = -1$.

Conclusion

Or $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Application

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

- 1 Écrire une expression de f sur \mathbb{R} sans valeur absolue.
- 2 Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1 .
- 3 f est-elle dérivable en -1 ?

Exercice :

Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

① $f(x) = |x^2 - 3x|$ et $a = 3$

② $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq -1 \\ x^2 - 2 & ; x < -1 \end{cases}$ et $a = -1$

③ $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ et $a = 0$

④ $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \geq 1 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3} & ; x < 1 \end{cases}$ et $a = 1$

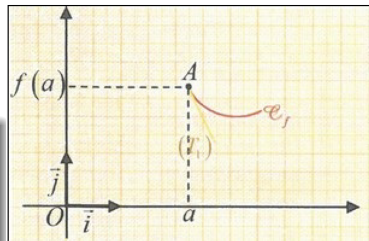
2/ Interprétation géométrique

• Dérivabilité à droite :

Si f est dérivable à droite en a , sa courbe \mathcal{C}_f admet une demi-tangente (T_1) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

Équation de (T_1)

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

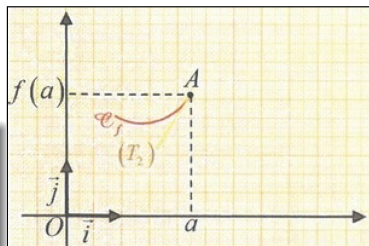


• Dérivabilité à gauche :

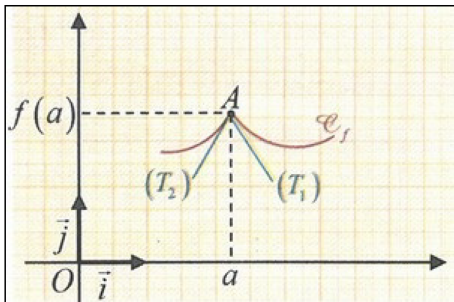
Si f est dérivable à gauche en a , sa courbe \mathcal{C}_f admet une demi-tangente (T_2) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

Équation de (T_2)

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

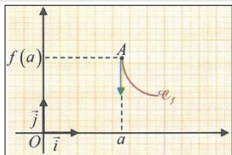


- Si f est dérivable à gauche et à droite en a telle que : $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ Alors f n'est pas dérivable en a .
On dit que le point $A(a; f(a))$ est un **point anguleux** de la courbe \mathcal{C}_f .

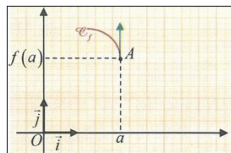


Remarques

- Si $f'_d(a) = 0$ (resp. $f'_g(a) = 0$), alors la demi-tangente (T_1) (resp. (T_2)) est **horizontale**, c'est-à-dire, parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors la courbe représentative \mathcal{C}_f admet une **demi-tangente verticale** au point $A(a; f(a))$ (parallèle à l'axe des ordonnées).



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
Étudions la dérivabilité de f à droite de 0.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0 ; donc la courbe de la fonction f admet une demi-tangente d'équation $x = 0$ et dirigée vers le haut.

Application

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a , puis définir les demi-tangentes de la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au point $A(a; f(a))$:

❶ $f(x) = |x^2 + x|$ et $a = 0$

❷ $f(x) = x|x - 2|$ et $a = 2$

❸ $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \leq -1 \\ x^2 + x & ; x > -1 \end{cases}$ et $a = -1$

❹ $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x & ; x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & ; -2 < x \leq 2 \end{cases}$ et $a = -2$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x$.

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x .

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x$.

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x .

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + (x+h) - 2x^2 - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h} \\ &= 4x + 1 \\ &= f'(x)\end{aligned}$$

- On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de \mathbb{R} .
- La fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R}** et se note par f' .

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .
- On note f' la fonction qui, à chaque $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x . On l'appelle la fonction dérivée de f .
- On écrit aussi : $f' = \frac{df}{dx}$
- f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .

Énoncé

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

① $x \mapsto C$ sur \mathbb{R}

② $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}

③ $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^{*+}

④ $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^{*+} et sur \mathbb{R}^{*-}

⑤ $x \mapsto \sin x$ sur \mathbb{R}

⑥ $x \mapsto \cos x$ sur \mathbb{R}

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
c (constante)	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$ax + b$	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

2/ Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Propriétés générales

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Proposition : Dérivée de la puissance d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a :

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

- Si pour tout x de I ; $f(x) \neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et :

$$(f^p)'(x) = p f^{p-1}(x) f'(x)$$

Exemple :

Soit $f(x) = (3x^2 + 1)^4$.

Proposition : Dérivée de la puissance d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a :

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

- Si pour tout x de I ; $f(x) \neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et :

$$(f^p)'(x) = p f^{p-1}(x) f'(x)$$

Exemple :

Soit $f(x) = (3x^2 + 1)^4$.

Ici $n = 4$ et $u(x) = 3x^2 + 1$.

Comme $u'(x) = 6x$, on a :

$$f'(x) = 4(3x^2 + 1)^{4-1} \times (6x) = 24x(3x^2 + 1)^3$$

Proposition : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

La fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I avec :

$$\forall x \in I : (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Exemple :

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

Proposition : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

La fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I avec :

$$\forall x \in I : (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Exemple :

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

Ici $f(x) = x^2 + 3$, qui est strictement positive sur \mathbb{R} .

Comme $f'(x) = 2x$, on a :

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Exercice

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition des fonctions f et f' , puis définir la fonction dérivée f' :

$$\textcircled{1} f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$\textcircled{2} f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 2x - 1$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{3}{(2x - 1)^2}$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{x + 1}$$

$$\textcircled{6} f(x) = \frac{7x - 1}{2x + 3}$$

$$\textcircled{7} f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2}$$

$$\textcircled{8} f(x) = (x^2 + x)^5$$

$$\textcircled{9} f(x) = \frac{3}{x}\sqrt{2x + 1}$$

$$\textcircled{10} f(x) = 5 \cos^3 x - 7 \sin^2 x$$

$$\textcircled{11} f(x) = (1 - x^2) \tan x$$

$$\textcircled{12} f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

Soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax + b) \in I$. Alors :

La fonction f définie par $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle J , et de plus :

$$(\forall x \in J) \quad f'(x) = au'(ax + b)$$

Exemple d'application

Si $f(x) = \cos(3x + 2)$, alors f est de la forme $u(ax + b)$ avec $u(x) = \cos(x)$.

On a $u'(x) = -\sin(x)$, donc :

$$f'(x) = 3 \times (-\sin(3x + 2)) = -3 \sin(3x + 2)$$

IV- Applications de la dérivation

1/ Monotonie d'une fonction numérique

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si la fonction f est constante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) = 0$
- Si la fonction f est croissante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- Si la fonction f est décroissante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , alors la fonction f est constante sur I .

Exercice :

En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \cos(2x) + 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

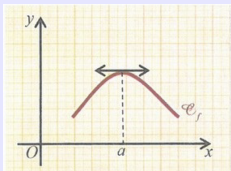
$$\textcircled{3} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

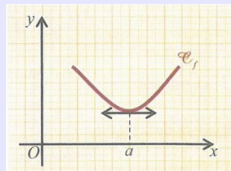
2/ Extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .
Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.



f présente un maximum dans a



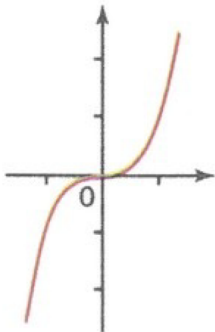
f présente un minimum dans a

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si la fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f .

Remarques

- La réciproque de la proposition précédente est évidemment fausse comme le montre l'exemple classique $f(x) = x^3$ sur \mathbb{R} .
- Pour cet exemple, on a $f'(0) = 0$ mais f ne présente pas un extremum en 0 :



La condition $f'(a) = 0$ est donc **nécessaire mais pas suffisante** pour que la fonction f présente un extremum en un point a d'un intervalle ouvert I .

Si f admet un extremum local au point a , alors la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point $A(a; f(a))$ est **horizontale**.

Application

Déterminer les extrema de chacune des fonctions suivantes :

① $f(x) = 4x^3 - x^2 - 1$

② $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

③ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

V- Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit que la fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I et f' dérivable sur I .

La dérivée de la fonction f' s'appelle la **dérivée seconde** de f est notée f'' .

Plus généralement, on définit par récurrence la **dérivée $n^{\text{ième}}$** de la fonction f , notée $f^{(n)}$, comme suit :

- On pose : $f^{(0)} = f$
- Pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n - 1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I . On pose alors :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Exercice :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$

Exercice :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

VI- L'équation différentielle

Définition

Soit ω un nombre réel. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} est appelée une équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle.

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur \mathbb{R} par :

$$y(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) \quad \text{où } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul et $(x_0; y_0; y_1) \in \mathbb{R}^3$.

Alors l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ possède une solution unique f vérifiant les conditions : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Remarques

- Dans le cas où $\omega = 0$, l'équation devient $y'' = 0$. La solution générale est donnée par $y(x) = ax + b$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
- La solution générale de $y'' + \omega^2 y = 0$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \lambda \cos(\omega x + \varphi) \quad \text{ou} \quad y(x) = \lambda \sin(\omega x + \varphi)$$

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

① $y'' + 3y = 0$

② $y'' + 9y = 0$

③ $y'' + 5y = 0$

Exercice 2

Déterminer la solution G de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que :

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{et} \quad G'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$