Devoir Surveillé $N^\circ 1$ (S2)

Durée : 1 heure 30 min

Exercice 1 :(12 points)

$(\forall x \in \mathbb{R})$, on pose : $P(x) = \sin(2x) + \cos(2x) - 1 + \sin x - \cos x$.

1. a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(2x) + \cos(2x) - 1 = 2\sin x \cos x - 2\sin^2 x$. **(1 pt)**

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(2x) + \cos(2x) - 1 = 2\sin x(\cos x - \sin x)$. **(1 pt)**

c) Montrer que $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **(2 pts)**

2. En déduire que $P(x) = \sqrt{2}(2\sin x - 1)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **(2 pts)**

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. **(2 pts)**

b) En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$. **(1 pt)**

a) Etudier le signe de $2\sin x - 1$ sur $]-\pi; \pi]$. **(1 pt)**

b) Etudier le signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ sur $]-\pi; \pi]$. **(1 pt)**

c) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $P(x) \geq 0$. **(1 pt)**

Exercice 2 : (8 points)

On considère le triangle ABC isocèle en B tel que : $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et E un point à l'intérieur de ABC. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r(A)$ en justifiant votre réponse. **(2 pts)**

2. Construire, sur votre copie, le point F l'image du point E par la rotation r. **(2 pts)**

3. Montrer que $AE = CF$. **(2 pts)**

4. Montrer que les droites (AE) et (CF) sont perpendiculaires : $(AE) \perp (CF)$. **(2 pts)**

Bonne chance