

# DEVOIR MAISON N°2

## Exercice 1 : (8 points)

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x E(2x) - 1}{x^2 - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x + x \sin 2x}{1 - \cos 3x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 2}{3x^2 - \sqrt{x} - 2}$$

Déterminer également les deux limites suivantes :

$$- \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 6\sqrt{x+2} + 10}{(x+1)^2}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x+3}} - 3}{\sqrt{x - \sqrt{x-2}} - 2}$$

## Exercice 2 : (6 points)

$$1. \text{ Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$$

$$2. \text{ Démontrer que : } \forall x \geq 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

$$3. \text{ En déduire que } \forall x \geq 0 : x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \quad \text{et} \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

$$4. \text{ Déduire la valeur de : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

## Exercice 3 : (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - x + 2$ .

1. Déterminer  $D_f$ .

2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

3. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 3 et à gauche de 1. Interpréter les résultats graphiquement.

4. Montrer que  $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} - 1$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .