

Étude des fonctions numériques

Professeur : EN NAOURI Mohammed

1Bac Sciences Mathématiques



Scannez-moi !

Objectifs du Cours : I

- Reconnaître une branche infinie d'une courbe ;
- Reconnaître et déterminer les asymptotes :
 - Parallèles à l'axe des abscisses ;
 - Parallèles à l'axe des ordonnées ;
 - Obliques ;
- Déterminer les branches paraboliques ;
- Reconnaître et étudier la concavité d'une courbe et recherche des points d'inflexion ;
- Utiliser la dérivée seconde pour déterminer les points d'inflexion ;
- Reconnaître et rechercher les centres et les axes de symétrie d'une courbe ;
- Utiliser les courbes pour résoudre des équations et des inéquations ;
- Utiliser les études de fonctions pour résoudre des problèmes de la vie courante ou d'autres matières.

- 1 I- Branches infinies d'une courbe
- 2 II- Concavité d'une courbe - Point d'inflexion
- 3 III- Éléments de symétrie d'une courbe
- 4 IV- Plan d'étude d'une fonction numérique

I- Branches infinies d'une courbe

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{D'où } D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Calcul des limites en l'infini :

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{D'où } D_f =] - \infty; 1[\cup] 1; +\infty[$$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{D'où } D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{D'où } D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) son graphe.

1) Déterminer D_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{D'où } D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

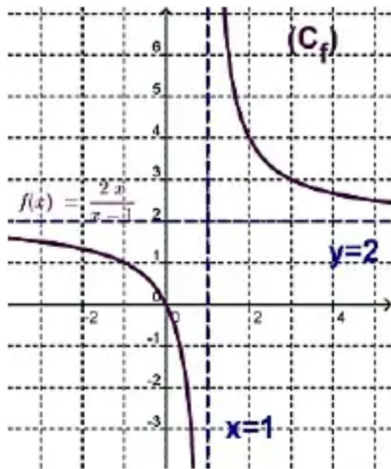
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) .

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

On dit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f) .



1/ Définition

Définition

On dit que la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f admet une branche infinie, lorsque l'une des coordonnées d'un point de \mathcal{C}_f tend vers l'infini.

Remarque

On sait que le couple de coordonnées d'un point M de la courbe \mathcal{C}_f est $(x; f(x))$ avec $x \in D_f$. Il s'ensuit donc que la courbe \mathcal{C}_f admet une branche infinie, si l'une, au moins, des conditions suivantes est vérifiée :

- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $] \alpha; +\infty[$.
- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $] -\infty; \alpha[$.
- La fonction f admet une limite infinie en un point (à gauche ou à droite).

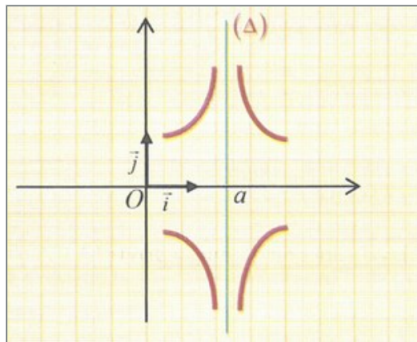
2/ Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition

Soit a un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ alors on dit que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe \mathcal{C}_f .



Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes verticales (parallèles à l'axe des ordonnées) à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{3x - 7}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x - 2}{(2x - 3)^2}$$

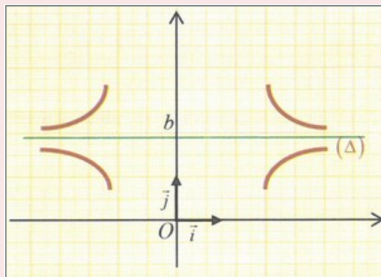
$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{-x}{\sqrt{2x - 1}}$$

3/ Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Définition

Soit b un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ alors on dit que la droite (Δ) d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe C_f .



Remarque

Pour étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f sur un intervalle I , et son asymptote d'équation $y = b$ on étudie le signe de la différence $f(x) - b$ sur l'intervalle I .

Si, par exemple, on a pour tout $x \in I : f(x) - b > 0$, alors la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = b$ sur l'intervalle I .

Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes horizontales (parallèles à l'axe des abscisses) à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f :

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$$

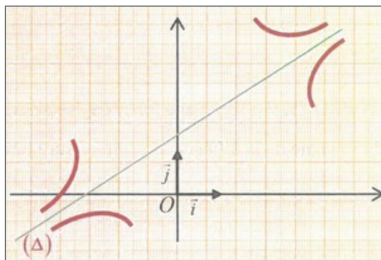
$$\textcircled{4} f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$$

4/ Asymptote oblique

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors on dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe \mathcal{C}_f .



Exemple : Asymptote oblique

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 4 - \frac{7}{x-1}$

Montrer que la droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

Exemple : Asymptote oblique

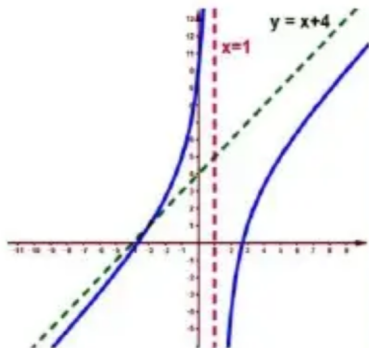
Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 4 - \frac{7}{x-1}$

Montrer que la droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x + 4))$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + 4 - \frac{7}{x-1} - x - 4 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-7}{x-1} = 0$$



Remarques

- Soit $(D) : y = ax + b$ une asymptote oblique de la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$. On a $(D) : ax - y + b = 0$. La distance du point $M(x; f(x))$ à la droite (D) est : $d(M; (D)) = \frac{|ax+b-f(x)|}{\sqrt{a^2+1}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, cette distance tend vers 0.
- Pour étudier la position relative : on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) > 0$, alors \mathcal{C}_f est au-dessus de (D) .
- Si $f(x) - (ax + b) < 0$, alors \mathcal{C}_f est en-dessous de (D) .
- Si $f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$ pour un $x_0 \in I$, alors \mathcal{C}_f et (D) sont sécantes.

Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$$① f(x) = 3x + \frac{1}{x-1}$$

$$⑤ f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$$

$$② f(x) = 2x - 3 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$⑥ f(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

$$③ f(x) = -x + \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$⑦ f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$④ f(x) = x + 4 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$⑧ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$$

Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

Pour que la droite $(D) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) soit une asymptote oblique de la courbe \mathcal{C}_f , il faut et il suffit qu'il existe une fonction u définie sur D_f telle que :

$$\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + u(x) \text{ et } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0 \right)$$

La droite $(D) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique de la courbe \mathcal{C}_f si, et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

ou

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \right)$$

Exemple : Recherche d'asymptote oblique

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

Exemple : Recherche d'asymptote oblique

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 = a \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 = b$$

Exemple : Recherche d'asymptote oblique

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 = a \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 = b$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{3x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x + 1}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = x\sqrt{\frac{4x}{x-2}}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

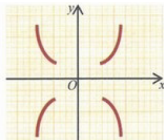
$$\textcircled{6} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + x}$$

5/ Branches Paraboliques

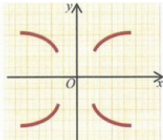
Définition

Soit f une fonction numérique telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

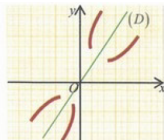
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction la droite (D) : $y = ax$** .



Branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées

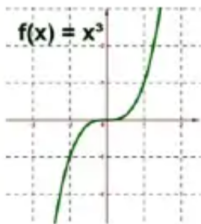


Branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses

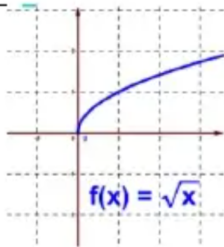


Branche parabolique dirigée vers la droite (D) : $y = ax$

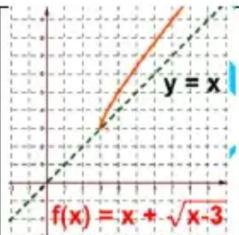
Exemple



(C_f) admet une
branche parabolique
dirigée vers l'axe
des ordonnées au
voisinage de $\pm\infty$



(C_f) admet une
branche parabolique
dirigée vers l'axe
des abscisses au
voisinage de $+\infty$



(C_f) admet une
branche parabolique
de direction la
droite d'équation
 $y = x$, au voisinage
de $+\infty$

Pour chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe \mathcal{C}_f :

① $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

② $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

③ $f(x) = x - \sqrt{x - 1}$

④ $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$

⑤ $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1} - 2x$

⑥ $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

⑦ $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2 - x + 1}}$

⑧ $f(x) = -x + \frac{x\sqrt{x}}{x + 4}$

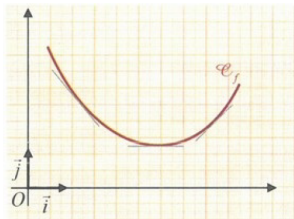
II- Concavité d'une courbe - Point d'inflexion

1/ Concavité d'une courbe

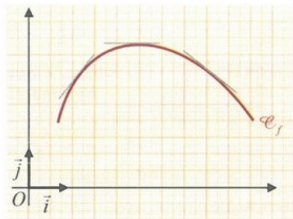
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

On dit que la courbe \mathcal{C}_f est **convexe** si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est **concave** si elle est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.



\mathcal{C}_f est convexe



\mathcal{C}_f est concave

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Pour que la courbe \mathcal{C}_f de f soit convexe sur I , il faut et il suffit que :
 $(\forall x \in I) f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe \mathcal{C}_f de f soit concave sur I , il faut et il suffit que :
 $(\forall x \in I) f''(x) \leq 0$

Exemple :

Exemple :

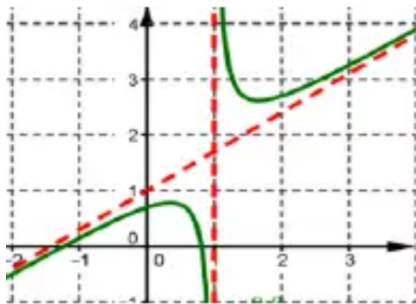
Soit f la fonction définie par son graphe.

Exemple :

Exemple :

Soit f la fonction définie par son graphe.
La fonction f est convexe sur l'intervalle
 $]1; +\infty[$

La fonction f est concave sur l'intervalle
 $] - \infty; 1[$



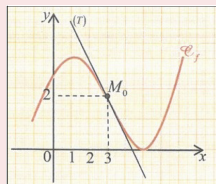
Remarque

La convexité et la concavité de la courbe \mathcal{C}_f dépendent de la position relative de \mathcal{C}_f et sa tangente (T) au point $M_0(x_0; f(x_0))$ sur un voisinage de x_0 , c'est-à-dire dépend du signe du nombre $l(x) = f(x) - y$ où $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est l'équation de la tangente (T).

2/ Point d'inflexion d'une courbe

Définition

On appelle point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f tout point où elle change de concavité.



Proposition

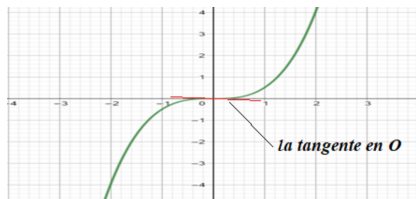
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Pour que le point $M_0(x_0; f(x_0))$ soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0 .

Exemple :

Exemple :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ et sa courbe représentée ci-contre :



Le point $O(0,0)$ est le point d'inflexion de la courbe car elle change de concavité en ce point.

Étudier la concavité de la courbe \mathcal{C}_f dans chacun des cas suivants :

① $f(x) = x^2 + 5x + 2$ et $I = \mathbb{R}$

② $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ et
 $I = \mathbb{R}$

③ $f(x) = -3x^2 + x + 1$ et $I = \mathbb{R}$

④ $f(x) = x^4 - 4x^3$ et $I = \mathbb{R}$

⑤ $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ et $I =]-\infty; -\frac{5}{2}[$

⑥ $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{(x-1)^2}$ et $I =]1; +\infty[$

⑦ $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$ et
 $I = [0; \frac{\pi}{2}]$

⑧ $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ et $I = [0; \pi]$

III- Éléments de symétrie d'une courbe

1/ Axe de symétrie d'une courbe

Activité 1

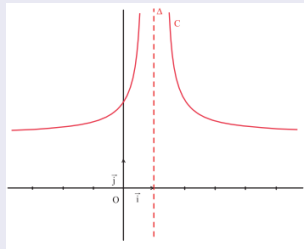
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^2}.$$

On se propose de montrer que la droite Δ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C .

Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{\Delta}(M)$.

- 1 Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .
- 2 Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 1$. Vérifier que N est un point de C , si et seulement si, $2 - x \neq 1$ et $f(2 - x) = f(x)$.
- 3 Conclure.

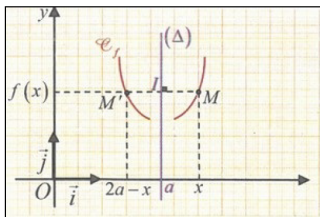


Proposition

Soit f une fonction numérique et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$



Exemple : Axe de symétrie

Exemple :

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$.

Exemple : Axe de symétrie

Exemple :

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$.

Montrons que la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie de (C_f) .

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}), (2\pi - x) \in D_f$

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}),$

$$f(2\pi - x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

Donc la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Application

Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe C_f :

① $f(x) = x^2 + 4x + 5$ et
 $(\Delta) : x = -2$

② $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et $(\Delta) : x = 0$

③ $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}$ et
 $(\Delta) : x = -\frac{1}{2}$

④ $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ et $(\Delta) : x = 1$

⑤ $f(x) = x^2 - 6x + 5$ et $(\Delta) : x = 3$

⑥ $f(x) = \sin^2 x + \cos(2x)$ et
 $(\Delta) : x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

2/ Centre de symétrie d'une courbe

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

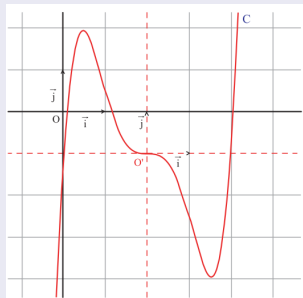
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^3(x^2-4x) - 1.$$

On se propose de montrer que le point $O'(2, -1)$ est un centre de symétrie de C .

Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{O'}(M)$.

- 1 Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .
- 2 Soit $M(x, f(x))$. Vérifier que N est un point de C , si et seulement si, $f(4-x) = -2 - f(x)$.
- 3 Conclure.

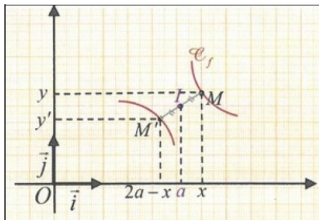


Définition

Soit f une fonction numérique et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que le point $\Omega(a; b)$ soit un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f , il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$



Exemple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Vérifier que l'origine O est un centre de symétrie de C .

Remarques

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe \mathcal{C}_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire, alors \mathcal{C}_f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- Si la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{tude} = D_f \cap [a; +\infty[$.

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f :

- 1 $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ et $\Omega(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
- 2 $f(x) = \cos x$ et $\Omega(\frac{\pi}{2}; 0)$
- 3 $f(x) = x^3 - 3x - 2$ et $\Omega(0; -2)$
- 4 $f(x) = \sin x$ et $\Omega(k\pi; 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

IV- Plan d'étude d'une fonction numérique

Pour étudier une fonction numérique, on suit généralement les étapes suivantes :

- ① Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f ;
- ② Étudier la parité, la périodicité de la fonction f , rechercher des centres ou des axes de symétrie, puis déterminer son ensemble d'étude D_E ;
- ③ Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition D_f ;
- ④ Étudier la dérivabilité de f sur D_E ;
- ⑤ Étudier les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variation sur D_f ;
- ⑥ Étudier les branches infinies de la courbe \mathcal{C}_f ;
- ⑦ Étudier les positions relatives de la courbe \mathcal{C}_f par rapport aux asymptotes s'ils existent ;
- ⑧ Déterminer les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f en des points particuliers ;
- ⑨ Étudier la concavité de la courbe \mathcal{C}_f en déterminant ses points d'inflexion s'ils existent en calculant la dérivée seconde ;
- ⑩ Construire la courbe \mathcal{C}_f . Pour cela :
 - Souvent choisir un repère orthonormé.
 - Construire les tangentes et les asymptotes.
 - Construire la courbe \mathcal{C}_f en tenant compte de tableau de variations, la concavité et les images de quelques points remarquables.

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1 Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
- 2 Calculer $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3 Étudier la convexité de la courbe (C_f) , en précisant les points d'inflexion de (C_f) s'ils existent.
- 4 Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 5 Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.