Étude des fonctions numériques

Professeur : EN NAOURI Mohammed

1Bac Sciences Mathématiques

Scannez-moi !

Objectifs du Cours : I

- Reconnaître une branche infinie d'une courbe ;
- Reconnaître et déterminer les asymptotes :
  - Parallèles à l'axe des abscisses ;
  - Parallèles à l'axe des ordonnées ;
  - Obliques ;
- Déterminer les branches paraboliques ;
- Reconnaître et étudier la concavité d'une courbe et recherche des points d'inflexion ;
- Utiliser la dérivée seconde pour déterminer les points d'inflexion ;
- Reconnaître et rechercher les centres et les axes de symétrie d'une courbe ;
- Utiliser les courbes pour résoudre des équations et des inéquations ;
- Utiliser les études de fonctions pour résoudre des problèmes de la vie courante ou d'autres matières.

Sommaire

I- Branches infinies d'une courbe

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \frac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ son graphe.

1) Déterminer D_f

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$ son graphe.

1) Déterminer $\mathbf{D_f}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où $\mathbf{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

2) Calcul des limites en l'infini :

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$ son graphe.

1) Déterminer $\mathbf{D_f}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où $\mathbf{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Activité : Asymptotes horizontale et verticale

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ son graphe.

1) Déterminer $\mathbf{D_f}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où $\mathbf{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $\mathbf{y = 2}$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **et** $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ son graphe.

1) Déterminer $\mathbf{D_f}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où $\mathbf{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}; +\infty[$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $\mathbf{y = 2}$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ son graphe.

1) Déterminer $\mathbf{D_f}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

D'où $\mathbf{D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[}$

2) Calcul des limites en l'infini :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

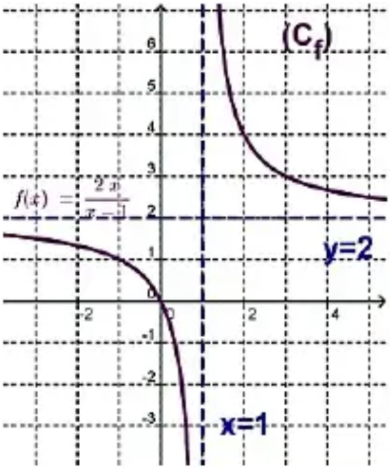
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

On dit que la droite d'équation $\mathbf{y = 2}$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

On dit que la droite d'équation $\mathbf{x = 1}$ est une asymptote verticale de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.



1/ Définition

Définition

On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une branche infinie, lorsque l'une des coordonnées d'un point de $\mathcal{C}_f$ tend vers l'infini.

Remarque

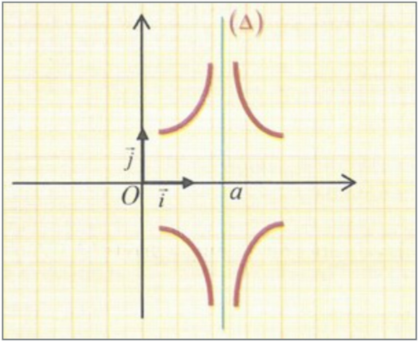
On sait que le couple de coordonnées d'un point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ est $(x; f(x))$ avec $x \in D_f$. Il s'ensuit donc que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie, si l'une, au moins, des conditions suivantes est vérifiée :

- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]\alpha; +\infty[$.
- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]-\infty; \alpha[$.
- La fonction f admet une limite infinie en un point (à gauche ou à droite).

2/ Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition

Soit a un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ alors on dit que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathcal{C}_f$.



Application

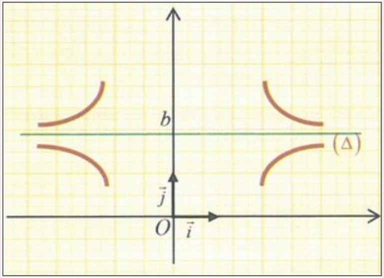
Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes verticales (parallèles à l'axe des ordonnées) à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f :

1. $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{(2x-3)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{\cos x + 1}$
5. $f(x) = \tan x$
6. $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{2x-1}}$
8. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$

3/ Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Définition

Soit b un nombre réel.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ alors on dit que la droite (Δ) d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathcal{C}_f$.



Remarque

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f sur un intervalle I, et son asymptote d'équation $y = b$ on étudie le signe de la différence $f(x) - b$ sur l'intervalle I.
Si, par exemple, on a pour tout $x \in I$: $f(x) - b > 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = b$ sur l'intervalle I.

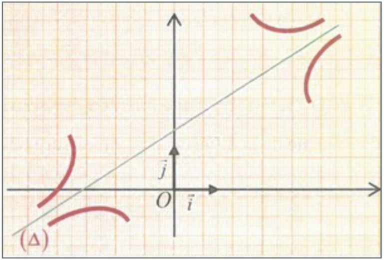
Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes horizontales (parallèles à l'axe des abscisses) à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f :

1. $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$
4. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors on dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exemple : Asymptote oblique

Exemple : **Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = x + 4 - \dfrac{7}{x - 1}}$**

Montrer que la droite d'équation $\mathbf{y = x + 4}$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

Exemple : Asymptote oblique

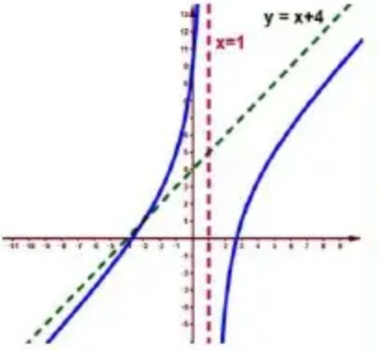
Exemple : **Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = x + 4 - \dfrac{7}{x-1}}$**

Montrer que la droite d'équation $\mathbf{y = x + 4}$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (x+4)\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + 4 - \frac{7}{x-1} - x - 4\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-7}{x-1} = 0$$



Remarques

- Soit $(D) : y = ax + b$ une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On a $(D) : ax - y + b = 0$. La distance du point $M(x; f(x))$ à la droite (D) est : $d(M; (D)) = \frac{|ax+b-f(x)|}{\sqrt{a^2+1}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, cette distance tend vers 0.
- Pour étudier la position relative : on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Si $f(x) - (ax + b) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D).
- Si $f(x) - (ax + b) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de (D).
- Si $f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$ pour un $x_0 \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ et (D) sont sécantes.

Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

1. $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x-1}$
2. $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$
3. $f(x) = -x + \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$
4. $f(x) = x + 4 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
5. $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2+3x+3}}$
7. $f(x) = \dfrac{-2x^3+x^2+1}{x^2-1}$
8. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-2}$

Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
Pour que la droite $(D) : y = ax + b$ $(a \neq 0)$ soit une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}_f$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction u définie sur D_f telle que :

$$\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + u(x) \text{ et } (\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} u(x) = 0)$$

La droite $(D) : y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si :

$$(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b)$$

ou

$$(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b)$$

Exemple : Recherche d'asymptote oblique

Exemple : Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}}$

Exemple : Recherche d'asymptote oblique

Exemple : **Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}}$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 = a \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = b$$

Exemple : Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 = a \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = b$$

Donc la droite d'équation $\mathbf{y = x}$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

Application

Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

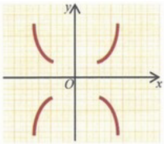
1. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{3x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-x+1}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$
4. $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$
5. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+x}$

5/ Branches Paraboliques

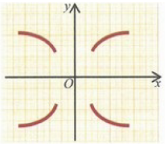
Définition

Soit f une fonction numérique telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

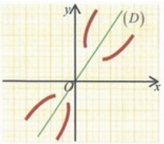
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite** (D) : $y = ax$.



Branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées

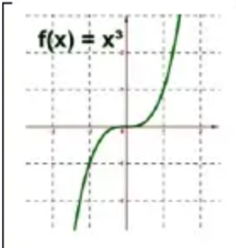


Branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses

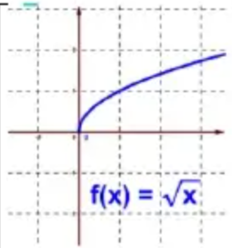


Branche parabolique dirigée vers la droite $(D) : y = ax$

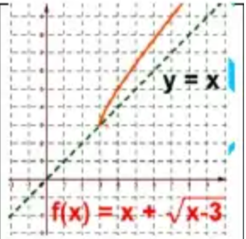
Exemple



(C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $\pm\infty$



(C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$



(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$, au voisinage de $+\infty$

Pour chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$:

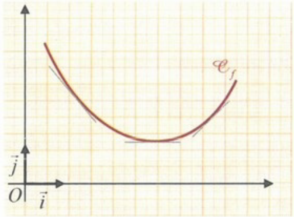
1. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
2. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
3. $f(x) = x - \sqrt{x - 1}$
4. $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$
5. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1} - 2x$
6. $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$
7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2 - x + 1}}$
8. $f(x) = -x + \dfrac{x\sqrt{x}}{x + 4}$

II- Concavité d'une courbe - Point d'inflexion

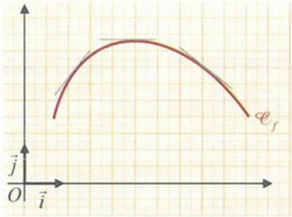
1/ Concavité d'une courbe

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est **convexe** si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est **concave** si elle est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.



$\mathscr{C}_f$ est convexe



$\mathscr{C}_f$ est concave

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$

Exemple :

Exemple :

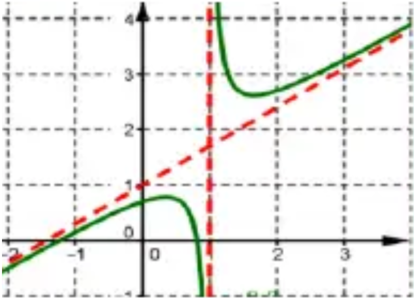
Soit f la fonction définie par son graphe.

Exemple :

Exemple :

Soit f la fonction définie par son graphe.
La fonction f est convexe sur l'intervalle $]\mathbf{1};+\infty[$

La fonction f est concave sur l'intervalle $]-\infty;\mathbf{1}[$



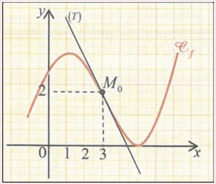
Remarque

La convexité et la concavité de la courbe $\mathcal{C}_f$ dépendent de la position relative de $\mathcal{C}_f$ et sa tangente (T) au point $M_0(x_0; f(x_0))$ sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire dépend du signe du nombre $I(x) = f(x) - y$ où $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est l'équation de la tangente (T).

2/ Point d'inflexion d'une courbe

Définition

On appelle point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ tout point où elle change de concavité.



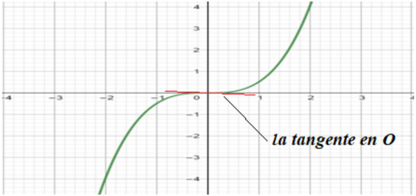
Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que le point $M_0(x_0; f(x_0))$ soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

Exemple :

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ et sa courbe représentée ci-contre :



Le point $O(0,0)$ est le point d'inflexion de la courbe car elle change de concavité en ce point.

Applications

Étudier la concavité de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans chacun des cas suivants :

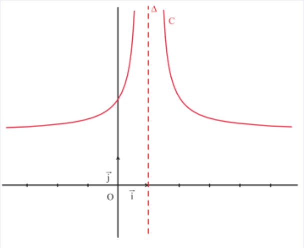
1. $f(x) = x^2 + 5x + 2$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = -3x^2 + x + 1$ et $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$ et $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$ et $I = \left]-\infty; -\dfrac{5}{2}\right[$
6. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{(x-1)^2}$ et $I =]1; +\infty[$
7. $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$ et $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
8. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ et $I = [0; \pi]$

III- Éléments de symétrie d'une courbe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}.$$



On se propose de montrer que la droite Δ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C.
Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_\Delta(M)$.

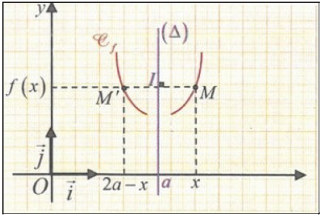
1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
2. Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 1$. Vérifier que N est un point de C, si et seulement si, $2 - x \neq 1$ et $f(2-x) = f(x)$.
3. Conclure.

Proposition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$



Exemple :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{x})$.

Exemple : Axe de symétrie

Exemple :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f(x)} = \cos(\mathbf{x})$.

Montrons que la droite d'équation $\mathbf{x} = \pi$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (2\pi - x) \in D_f$

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}),$

$$f(2\pi - x) = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

Donc la droite d'équation $\mathbf{x} = \pi$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$.

Application

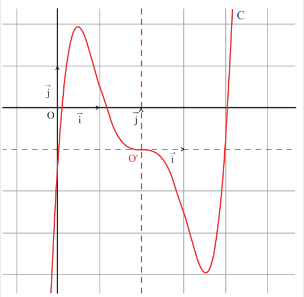
Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$:

1. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ et $(\Delta) : x = -2$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ et $(\Delta) : x = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-1}$ et $(\Delta) : x = -\frac{1}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $(\Delta) : x = 1$
5. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ et $(\Delta) : x = 3$
6. $f(x) = \sin^2 x + \cos(2x)$ et $(\Delta) : x = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^3(x^2-4x) - 1.$$



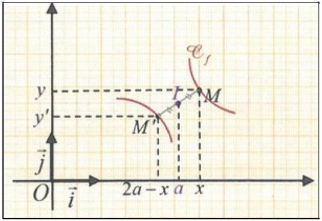
On se propose de montrer que le point $O'(2, -1)$ est un centre de symétrie de C.
Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{O'}(M)$.

1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
2. Soit $M(x, f(x))$. Vérifier que N est un point de C, si et seulement si, $f(4-x) = -2 - f(x)$.
3. Conclure.

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Pour que le point $\Omega(a; b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$



Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que l'origine O est un centre de symétrie de C.

Remarques

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- Si la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{tude} = D_f \cap [a; +\infty[$.

Application

Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$:

1. $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ et $\Omega\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
2. $f(x) = \cos x$ et $\Omega\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
3. $f(x) = x^3 - 3x - 2$ et $\Omega(0; -2)$
4. $f(x) = \sin x$ et $\Omega(k\pi; 0)$ $(k \in \mathbb{Z})$

IV- Plan d'étude d'une fonction numérique

Pour étudier une fonction numérique, on suit généralement les étapes suivantes :

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f ;
2. Étudier la parité, la périodicité de la fonction f, rechercher des centres ou des axes de symétrie, puis déterminer son ensemble d'étude D_E ;
3. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition D_f ;
4. Étudier la dérivabilité de f sur D_E ;
5. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation sur D_f ;
6. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$;
7. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes s'ils existent ;
8. Déterminer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ en des points particuliers ;
9. Étudier la concavité de la courbe $\mathcal{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion s'ils existent en calculant la dérivée seconde ;
10. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$. Pour cela :
    - Souvent choisir un repère orthonormé.
    - Construire les tangentes et les asymptotes.
    - Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ en tenant compte de tableau de variations, la concavité et les images de quelques points remarquables.

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2}$

1. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Étudier la convexité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, en précisant les points d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent.
4. Montrer que le point $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{3x^4+1}{3x^3}}$

1. Étudier la parité de la fonction f et en déduire D_E, le domaine d'étude de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.
3. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
   b. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (D) sur D_E.
4. **a.** Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$, la courbe représentant la fonction f.
6. Considérons la fonction g définie par $\mathbf{g(x) = \dfrac{3x^4+1}{3|x^3|}}$
   a. Étudier la parité de la fonction g.
   b. Tracer $(\mathcal{C}_g)$, la courbe de g, en justifiant votre réponse.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Étudier la fonction f puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère.

Exercice 15 : Étude complète et valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{(x+2)|x-1|}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite $(D) : y = 2x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D) sur $[1;+\infty[$.
4. Étudier la dérivabilité de f au point -2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
5. Étudier la dérivabilité de f au point 1 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
6. Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in]-2;1[\cup]1;+\infty[)$.
7. Dresser le tableau de variations de f.
8. Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.
9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
10. Soit g la fonction définie par : $\mathbf{g(x) = 2\sqrt{|(x+2)(x-1)|}}$
    (a) Montrer que la droite $(\Delta) : x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$.
    (b) Dresser le tableau de variations de g.

Exercice 17 : Fonction définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \dfrac{4\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sin(2x)}{2(1-\cos(x))^2} & x > 0 \\ \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2+1} & x \leq 0 \end{cases}$$

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = -2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat.
4. Étudier la dérivabilité de f au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
6. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice : Problème de synthèse

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des paramètres, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$$

1. Déterminer $(\mathcal{C}_f)$ dans le cas : $a = b = c = 0$.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que :
   - La droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$.
   - $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
3. On prend dans la suite : $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
   (c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).
   (d) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
   (e) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
   (f) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :
   $\mathbf{2x^3 - (m+3)x^2 + 1 = 0}$
   (g) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation :
   $\mathbf{2\sin^3(t) - (m+3)\sin^2(t) + 1 = 0}$
   (h) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation :
   $\mathbf{2\sin^3(t) - 3\sin^2(t) + 1 = 0}$

Exercice : Fonction paramétrée

Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^3}{x^2 + mx + m}$$

$(\mathcal{C}_m)$ **la courbe représentative de f_m.**

1. Déterminer suivant les valeurs de m, le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_m}$.
2. Déterminer en fonction de m, les valeurs de a, b, c et d tels que :

$$f_m(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + mx + m}$$

3. En déduire l'équation de l'asymptote oblique de $(\mathcal{C}_m)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
4. On suppose que $0 < m < 4$ et soit (Δ_m) la droite d'équation $y = x - m$.
   - (a) Étudier suivant les valeurs de m, la position relative de $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à (Δ_m).
   - (b) Calculer $f'_m(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_{f_m})$.
   - (c) Donner suivant les valeurs de m, le tableau de variations de f_m.
5. On suppose que $m = 2$.
   - (a) Dresser le tableau de variations de f_2.
   - (b) Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ admet en deux points A et B une tangente parallèle à la droite (Δ_2).
   - (c) Déterminer les coordonnées de A et B.
   - (d) Construire la courbe $(\mathcal{C}_2)$.